УДК 550.343.6

В.Н. Тищенко

ПОВЕРХНОСТНЫЕ ВОЛНЫ ОТ ГЛУБИННЫХ СЕЙСМИЧЕСКИХ РАЗРЫВОВ УПРУГОЙ СРЕДЫ

Вивчено пакет хвиль Релея від дії глибинного точечного нестаціонарного розриву, якій створює повздовжні та поперечні хвилі на поверхні пружного півпростору.

SUPERFICIAL WAVES FROM DEEP SEISMIC BREAKS OF ELASTIC ENVIRONMENT

The package of Reley waves from influence of deep dot non-stationary break is investigated which creates longitudinal and cross waves on a surface of an elastic half-space

Рассматриваются поверхностные волновые поля в упругом полупространстве от нестационарного сейсмического разрыва, находящегося на глубине h цилиндрической системы координат с началом в эпицентре $r=0$, $z=0$, в которой ось z направлена в упругую среду. Ставится задача идентификации фронтов поверхностных волн при возбуждении поверхности $z=0$ P - и SV - волнами: отраженных PP, PS, SS, SP - волн и R-волн типа Релея, фронты которых на длительном временном интервале имеют постоянные скорости $c_1 > c_2 > c_R$ (c_1 - скорость продольных волн, c_2 - поперечных, c_R - скорость волн Релея). Очевидно, что суммарный сигнал имеет множество фронтов волн, и различить в их совокупности волны Релея достаточно трудная задача, т.к. здесь многое зависит от определения волн и их фронтов.

Поле осесимметричных смещений упругой среды можно определить через потенциалы Φ, Ψ, так что:

$$\vec{u} = grad\,\Phi + rot\,rot\,\vec{\Psi}, \quad \vec{\Psi} = \{0, 0, \Psi(r,z,t)\},$$
$$\Phi = \Phi_0(r,z,t) + \Phi_{pp} + \Phi_{sp}, \quad \Psi = \Psi_0(r,z,t) + \Psi_{ps} + \Psi_{ss}.$$

Здесь Φ_0, Ψ_0 - потенциалы P - и SV - волн от разрыва смещений на плоскости $z=h$; Φ_{pp}, Φ_{sp} - отраженные продольные волны (вторая индексная буква) от волн Φ_0, Ψ_0 (первая индексная буква). Аналогично для Ψ - волн: Ψ_{ss}, Ψ_{ps} - отраженные волны типов волн, указанных в индексах. Все они являются решениями однородных волновых уравнений соответственно со скоростями c_1, c_2.

Потенциалы набегающих (падающих) волн удовлетворяют волновым уравнениям с правой частью с дельта-функцией Дирака

$$\Delta\Phi_0 - \frac{1}{c_1^2}\frac{\partial^2\Phi_0}{\partial t^2} = \frac{A(r,t)}{4\pi\mu}\,\delta(z-h), \quad \Delta\Psi_0 - \frac{1}{c_2^2}\frac{\partial^2\Psi_0}{\partial t^2} = \frac{B(r,t)}{4\pi\mu}\,\delta(z-h). \quad (1)$$

где μ - модуль сдвига

Применяя к решению волновых уравнений преобразование Фурье по времени и преобразование Бесселя по полярной координате, так что

$$\Phi_0 = \mathrm{Re}\int_0^\infty\int \overline{\overline{\Phi}}_0(\omega,k)e^{-q|h-z|}kJ_0(kr)\cos\omega t\, d\omega\, dt = \overline{\overline{\Phi}}_0(\omega,k)e^{-q|h-z|},$$

$$\Psi_0 = \mathrm{Re}\int_0^\infty\int \overline{\overline{\Psi}}_0(\omega,k)e^{-q|h-z|}kJ_0(kr)\cos\omega t\, d\omega\, dt = \overline{\overline{\Psi}}_0(\omega,k)e^{-q|h-z|}$$

(условно)

$$\begin{aligned} \Phi_{pp} &= \overline{\overline{\Phi}}_0 PP(\omega,k)e^{-q(h+z)}, \quad \Phi_{sp} = \overline{\overline{\Psi}}_0 SP(\omega,k)e^{-sh-qz}, \\ \Psi_{ss} &= \overline{\overline{\Psi}}_0 SS(\omega,k)e^{-s(h+z)}, \quad \Psi_{ps} = \overline{\overline{\Phi}}_0 PS(\omega,k)e^{-qh-sz}, \end{aligned} \tag{2}$$

где PP, PS, SS, SP - т.н. “коэффициенты отражения” волн P и SV соответственно, $q=\sqrt{k^2-\omega^2/c_1^2}$, $s=\sqrt{k^2-\omega^2/c_2^2}$. Они подлежат определению из граничных условий отсутствия напряжений $\vec{\sigma}_z$ на поверхности $z=0$:

$\sigma_{rz}=0$:

$$[-2qk+2qkPP-k(2k^2-\frac{\omega^2}{c_2^2})PS]\Phi_0 e^{-qh}+[-k(2k^2-\frac{\omega^2}{c_2^2})(1+SS)+2kqSP]\Psi_0 e^{-sh}=0$$

$\sigma_{zz}=0$:

$$[(2k^2-\frac{\omega^2}{c_2^2})(1+PP)-2k^2sPS]\Phi_0 e^{-qh}+[-2k^2s(SS-1)+(2k^2-\frac{\omega^2}{c_2^2})SP]\Psi_0 e^{-sh}=0$$

или ввиду произвольного задания Φ_0, Ψ_0 будет:

$$\begin{cases} 2qPP-(2k^2-\frac{\omega^2}{c_2^2})PS=2q; \\ (2k^2-\frac{\omega^2}{c_2^2})PP-2k^2sPS=-(2k^2-\frac{\omega^2}{c_2^2}); \end{cases} \begin{cases} (2k^2-\frac{\omega^2}{c_2^2})SS-2qSP=-(2k^2-\frac{\omega^2}{c_2^2}); \\ -2k^2sSS+(2k^2-\frac{\omega^2}{c_2^2})SP=-2k^2. \end{cases}$$

Раскрывая в соответствии с методом Крамера определители, окончательно получим:

$$\Delta=(2\mathrm{k}^2-\frac{\omega^2}{c_2^2})^2-4k^2sq=R(\omega,k),\quad PP=-\frac{(2\mathrm{k}^2-\frac{\omega^2}{c_2^2})^2+4k^2sq}{R}=SS;$$

$$PS=-\frac{4q(2\mathrm{k}^2-\frac{\omega^2}{c_2^2})^2}{R};\quad SP=-\frac{4k^2s(2\mathrm{k}^2-\frac{\omega^2}{c_2^2})^2}{R},$$

посредством которых можно найти:

$$u_r=-\frac{4qsk\omega^2}{c_2^2R}\Phi_0e^{-qh}+\frac{2k(2k^2-\frac{\omega^2}{c_2^2})\omega^2s}{c_2^2R}\Psi_0e^{-sh}$$

$$u_z=\frac{2q\omega^2(2k^2-\frac{\omega^2}{c_2^2})}{c_2^2R}\Phi_0e^{-qh}-\frac{4k^2sq\omega^2}{c_2^2R}\Psi_0e^{-sh}\ .$$

Величины Φ_0,Ψ_0 пропорциональны скачкам перемещений $\Delta u_z,\Delta u_r$, сейсмического разрыва сплошной твердой среды при $z=h$. Это можно получить из выражений для потенциалов $\Phi_0(k,\omega,z),\Psi_0(k,\omega,z)$, производные по z которых терпят разрыв первого рода:

$$u_z\sim\frac{\partial\Phi_0}{\partial z}=q\overline{\overline{\Phi}}_0(k,\omega)sign(h-z)e^{-q|h-z|}+\text{ непрерывная часть для }\forall z,$$

$$u_r\sim\frac{\partial^2\Psi_0}{\partial r\partial z}=ks\overline{\overline{\Psi}}_0(k,\omega)sign(h-z)e^{-s|h-z|}+\text{ непрерывная часть для }\forall z,$$

так что при $z=h$:

$$2q\Phi_0=\overline{\overline{u}}_z^+-\overline{\overline{u}}_z^-=\Delta_z(z=h)=\overline{\overline{\Delta}}_z(\omega,k),$$

$$2sk\Psi_0=u_r^+-u_z^-=\Delta_r(z=h)=\overline{\overline{\Delta}}_r(\omega,k).$$

Окончательные выражения для смещений через величины раскрытия $\overline{\overline{\ddot{\Delta}}}_r(k,\omega)$, $\overline{\overline{\ddot{\Delta}}}_z(k,\omega)$ - образ Фурье-Бесселя ускорений скачков смещений, имеют вид:

$$u_r = +\mathrm{Re}\int_0^\infty\int \frac{2sk^2}{c_2^2 R(\omega,k)}\overline{\overline{\ddot{\Delta}}}_z(k,\omega)e^{-qh}J_1(kr)\cos\omega t\, d\omega\, dk -$$

$$-\mathrm{Re}\int_0^\infty\int \frac{k(2k^2-\frac{\omega^2}{c_2^2})}{c_2^2 R(\omega,k)}\overline{\overline{\ddot{\Delta}}}_r(k,\omega)e^{-sh}J_1(kr)\cos\omega t\, d\omega\, dk,$$

$$u_z = -\mathrm{Re}\int_0^\infty\int \frac{k(2k^2-\frac{\omega^2}{c_2^2})}{c_2^2 R(\omega,k)}\overline{\overline{\ddot{\Delta}}}_z e^{-qh}J_0(kr)\cos\omega t\, d\omega\, dk +$$

$$+\mathrm{Re}\int_0^\infty\int \frac{2kq^2}{c_2^2 R(\omega,k)}\overline{\overline{\ddot{\Delta}}}_r e^{-sh}J_0(kr)\cos\omega t\, d\omega\, dk. \qquad (3)$$

Полученные выражения допускают выделение вычета, пользуясь соотношением:

$$\mathrm{Re}\int_0^\infty F(i\omega)\cos\omega t\, d\omega = -\mathrm{Im}\int_0^\infty F(i\omega)\sin\omega t\, d\omega \quad + \quad \pi\,\mathrm{Re}\sum_{k=1}^{N} resF(i\omega_k),$$

где ω_k - полюса функций $F(i\omega)$, равных для u_r, u_z:

$$F_r(i\omega) = -\int_0^\infty [\frac{2sk^2}{c_2^2 R(\omega,k)}\overline{\overline{\ddot{\Delta}}}_z(k,i\omega)e^{-qh} - \frac{k(2k^2-\frac{\omega^2}{c_2^2})}{c_2^2 R(\omega,k)}\overline{\overline{\ddot{\Delta}}}_r(k,i\omega)e^{-sh}]J_1(kr)dk,$$

$$F_z(i\omega) = -\int_0^\infty [\frac{k(2k^2-\frac{\omega^2}{c_2^2})}{c_2^2 R(\omega,k)}\overline{\overline{\ddot{\Delta}}}_z(k,i\omega)e^{-qh} - \frac{2k^2q}{c_2^2 R(\omega,k)}\overline{\overline{\ddot{\Delta}}}_r(k,i\omega)e^{-sh}]J_0(kr)dk.$$

Определение. Волной Релея называется величина $\vec{u}^R$, равная значению вычета подынтегральных выражений в точке $\omega = c_R k$, где $R(\omega,k)=0$ (c_R - скорость волн Релея).

Как видно из (3), для точечного источника, когда $\overline{\overline{\ddot{\Delta}}}_{r,z}$ не зависит от *k,* существуют четыре выражения волн Релея как составляющих перемещений u_r, u_z:

$$u_r^R = \overline{\overline{\ddot{\Delta}}}_z * M^p(p_R)\,\mathrm{Re}(\frac{t-i\overline{q}(p_R)h}{r\sqrt{z_1}} - \frac{1}{r}) + \overline{\overline{\ddot{\Delta}}}_r * M^s(p_R)\,\mathrm{Re}(\frac{t-i\overline{s}(p_R)h}{r\sqrt{z_2}} - \frac{1}{r}),$$

$$u_z^R = \overline{\overline{\ddot{\Delta}}}_z * N^p(p_R)\,\mathrm{Im}\frac{1}{\sqrt{z_1}} + \overline{\overline{\ddot{\Delta}}}_r * N^s(p_R)\,\mathrm{Im}\frac{1}{\sqrt{z_2}},$$

где введены обозначения:

$$p_R = \frac{1}{c_R}, \quad M^p(p) = -\frac{2p^2\bar{s}(p)}{c_2^2 R'(1,p)}, \quad M^s(p) = -\frac{p(2p^2 - \frac{1}{c_2^2})}{c_2^2 R'(1,p)},$$

$$N^p(p) = \frac{p(2p^2 - \frac{1}{c_2^2})}{c_2^2 R'(1,p)}, \quad N^s(p) = -\frac{2p^2\bar{q}(p)}{c_2^2 R'(1,p)},$$

$$z_1 = (t - i\bar{q}(p_R)h)^2 - p_R^2 r^2, z_2 = (t - i\bar{s}(p_R)h)^2 - p_R^2 r^2,$$

$$\bar{s} = \sqrt{p^2 - \frac{1}{c_2^2}}, \bar{q} = \sqrt{p^2 - \frac{1}{c_1^2}},$$

$a * b = \int_0^t a(t-\tau)b(\tau)d\tau$ - свертка функций.

При вычислении последних выражений использованы табличные интегралы:

$$\int_0^\infty e^{-ax} J_0(bx) \sin cx dx = \operatorname{Im} \frac{1}{\sqrt{(c-ia)^2 - b^2}};$$

$$\int_0^\infty e^{-ax} J_1(bx) \sin cx dx = \frac{1}{b} \operatorname{Re}\left(\frac{c-ia}{\sqrt{(c-ia)^2 - b^2}} - 1\right) =$$

$$= \operatorname{Re} \frac{b}{\sqrt{(c-ia)^2 - b^2}(c - ia + \sqrt{(c-ia)^2 - b^2})} \quad (\operatorname{Im} b = 0).$$

Изучим передаточные функции волн типа Релея, которые могут быть представлены в виде волновых пакетов с выделением амплитуд и фаз:

$$u_r^{RP}(r,t) = M^p(p_R) A_r^p(r,t) \cos\theta_r^p(r,t),$$
$$u_z^{RP}(r,t) = N^p(p_R) A_z^p(r,t) \sin\theta_z^p(r,t),$$
$$u_r^{RS}(r,t) = M^S(p_R) A_r^S(r,t) \cos\theta_r^S(r,t),$$
$$u_z^{RS}(r,t) = N^S(p_R) A_z^S(r,t) \sin\theta_z^S(r,t),$$

$$A_z^p = \tfrac{1}{\sqrt{R}}, \quad A_r^p = \frac{1}{r\sqrt{R}} \sqrt{\rho^2 + R - 2\rho\sqrt{R}\cos(\varphi^P - \theta_z^P)}, \; R^2 = x^2 + y^2,$$

$$x = t^2 - \bar{q}^2(p_R)h^2 - p_R^2 r^2,\ y = -2t\bar{q}(p_R)h,\ \theta_z^p = \frac{1}{2}\left(arctg\frac{y}{x} + \pi \right)$$

$$\rho^2 = t^2 + \bar{q}^2(p_R)h^2, \varphi^P = \pi - arctg\frac{\bar{q}(p_R)h}{t}, \theta_r^P = \varphi^P - \theta_z^P + \beta,\ sin\beta = \frac{\rho sin(\varphi - \theta_z^P)}{A_r^p}$$

(для значений A_r^S, A_z^S заменить $\bar{q}(p_R) \to \bar{s}(p_R)$ в выражениях для A_r^p, A_z^p).

Волны в сплошной среде выделяются своим фронтом, который обычно определяется скачком функции или ее производных как, например, для P - SV волн. Для волн типа Релея естественным является определение фронта как экстремального значения (горб, впадина) волны в пространстве. При высокочастотном характере сейсмических разрывов наличие экстремумов функции по t и r не является показательным. Однако выделение экстремума амплитудного множителя волны, как правило, несет в себе информацию, например, об энергии волнового пакета [4]. Поэтому естественно считать фронтом волны Релея максимумы (минимумы) амплитуды волнового пакета в пространстве.

Рассмотрим волны Релея вертикальной составляющей, для которой можно получить аналитические выражения для фронтов. Найдем экстремумы амплитуды A_z^p (аналогично A_z^S) для импульсного источника $\ddot{\Delta}_z(t)$:

$$\frac{\partial A_z^p}{\partial r} = \frac{2p_R^2 r\cos\theta}{\sqrt{R}} = 0,$$

$$r_1 = 0, \quad r_2 = \frac{1}{p_R}\sqrt{t^2 - (p_R^2 - \frac{1}{c_1^2})h^2} = \sqrt{c_R^2 t^2 - [1 - (\frac{c_R}{c_1})^2]h^2},$$

$$A_z^P(r_1) = \frac{1}{\sqrt{t^2 + \bar{q}^2(p_R)h^2}}, \quad A_z^P(r_2) = \frac{1}{\sqrt{2t\bar{q}(p_R)h}}, \theta_z^P(r_2) = \frac{\pi}{4}.$$

Анализ этих выражений показывает динамику развития продольной волны Релея во времени:

- после подхода к поверхности полупространства P-волны при $t_p = h/c_1$ в эпицентре возникает максимум смещения – фронт волны Релея неподвижен по r с амплитудой $A_z^p(r_1)$;

- при $t \ge \bar{q}(p_R)h = t_R^P > t_p$ появляется движущийся максимум – фронт Релея $r_2(t)$; $A_z^p(0)$; становится минимумом и «оседает» по собственному закону; фронт волны Релея движется по закону $r = r_2(t)$ и при $t \to \infty$ выходит на стационарную скорость, т.е. $r_2(t) = c_R t$, который движется за фронтами P-SV волны: $r_p^0 = c_1 t$ и $r_s^0 = c_2 t > c_R t$.

Таким образом, время t_R^P можно считать временем образования движущегося фронта продольной волны Релея, имеющего переменную скорость из-за «глубинности» источника возникновения P - волны.

Иначе происходит динамика формирования волны Релея от SV – волны, которая достигает свободной поверхности полупространства в момент времени $t_S = h/c_2$. Решая аналогично задачу о фронте волны Релея для поперечной волны, получим, что образование максимума амплитудной характеристики волнового пакета достигается в момент времени $t_R^S = \bar{s}(p_R)h < t_S$, что физически недопустимо из-за нарушения принципа причинности – волна Релея есть следствие падения поперечной волны. Поэтому до момента t_S волн на поверхности нет, а для $t > t_S$ фронт поперечной волны имеет координату $r_S = \sqrt{c_2^2 t^2 - h^2}$. Поэтому видимый максимум движущейся волны Релея – фронт Релея – можно наблюдать только после момента времени, когда

$$r_S = r_R = \sqrt{c_R^2 t^2 - c_R^2 s^2 (p_R) h^2} = \sqrt{c_R^2 t^2 - \left(1 - c_R^2 / c_2^2\right) h^2},$$

откуда $t_K^S = \dfrac{c_R h}{c_2 \sqrt{c_2^2 - c_R^2}}$. Именно в этот момент фронт волны Релея станет видимым и распространяется вслед за фронтом поперечной волны r_S.

Таким образом, существуют две волновые картины образования поверхностных вертикальных смещений:

1) для продольных P – волн при $t_P = h/c_1$ возникает фронт продольных PP и PS волн, движется по закону $r_P(t) = \sqrt{c_1^2 t^2 - h^2}$; Внутри его при $0 \le r \le r_P(t)$, $t_P \le t \le t_R^p$ развивается фронт волны Релея (продольной), который фокусируется при $r = 0$; при $t \ge t_R^p$ появляется движущийся по закону $r_R^P(t) = \sqrt{c_R^2 t^2 - c_R^2 q^2 h^2}$ фронт волны Релея, как экстремум волны по пространственной переменной (экстремум при $r = 0$ продолжает существовать, но он меняется с максимума на минимум, что соответствует постоянной фазе $\theta = \pi/4$ или постоянной амплитуде волнового пакета в пространстве и времени);

2) для поперечной SV – волны при $t_S = h/c_2$ возникает фронт поперечных SS и SP – волн, который движется по закону $r_S(t) = \sqrt{c_R^2 t^2 - h^2}$; внутри его при $0 \le r \le r_S(t)$, $t_S \le t \le t_R^S$ развивается фронт поперечной волны Релея, который имеет наибольшее значение при $r = r_S(t)$ при $t > t_R^S$ появляется движущийся по закону $r_R^S(t) = \sqrt{c_R^2 t^2 - c_R^2 \bar{s}^2 (p_R) h^2}$ как экстремум (максимум волны по пространственной переменной (экстремум при $r = 0$ продолжает существовать), так что фронт поперечной волны отделяется от фронта волны Релея (поперечной);

При сложении этих волновых процессов можно в пространстве наблюдать следующую картину: фронт продольных волн PP, PS как точку разрыва некоторой производной перемещения u_z и за ним два фронта волн Релея ($t > t_R^S$), причем поперечная волна Релея находится впереди (!) продольной волны Релея, обозначенных максимумами, которые при $t \to \infty$ сливаются в один фронт суммарной волны Релея как это следует из решения задачи Лэмба для поверхностных источников [2].

Можно получить следующую зависимость промежутка времени прихода в точку r_0 фронта волн Релея и глубиной очага:

$$\Delta(t) = \lim_{t\to\infty}(t_R^S - t_R^P) = \frac{c_1^2 - c_2^2}{2c_R^2 c_1^2 t} h^2 ,$$

что позволяет для конечного отрезка времени определить по измерениям t и Δ глубину очага разрыва смещений, которые обуславливают сейсмические процессы. Что касается радиальных смещений, которые также образуют подобную картину, то это результат дальнейших исследований.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Аки К., Ричардс П. Количественная сейсмология: теория и методы. Т.1. Пер. с англ. - М.: Мир, 1983. – 520 с.
2. Новацкий В. Теория упругости. - М.: Мир, 1975. – 872 с.
3. Градштейн И.С., Рыжик И.М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. - М. Мир, 1971. – 1108 с.
4. Уизем Дж. Линейные и нелинейные волны. Пер. с англ - М.: Мир, 1977. - 622 с.

УДК 622.834.53

М.И. Бугара, В.А. Коломиец

АНАЛИЗ НАТУРНЫХ НАБЛЮДЕНИЙ СМЕЩЕНИЙ ЗЕМНОЙ ПОВЕРХНОСТИ

Розглядається питання нерівномірності зсувань земної поверхні при підземному виймані вугілля. Показано, що вони суттєво коливаються відносно детермінованих значень, які встановлюються нормативною методикою.

THE ANALYSIS OF ACTUAL SUPERVISION OF DISPLACEMENT OF A TERRESTRIAL SURFACE

Considering problem irregularity surface displacement at mining. Detection – displacement significantly oscillation comparatively determinate value, which standard method calculation.

Ведение подземных горных работ неизбежно приводит к смещениям земной поверхности. Существующая нормативная методика [1] определяет мульду сдвижений как плавную кривую линию. Однако практика наблюдения за земной поверхностью показывает, что реально образующаяся мульда сдвижений не является идеальной линией. Это в первую очередь вызвано неравномерностью распределения физико-механических свойств горных пород в массиве, а